ÉCOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1980

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

DEUXIEME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

N.B. : Ce sujet comporte 2 pages de texte.

Soit f la fonction réelle de variable réelle définie par $f(x) = x\,e^{-x}$. On note $f_1 = f$ et, pour tout n entier naturel au moins égal à 2,
$f_n = f \circ f_{n-1} = f_{n-1} \circ f$.

I

1°) a) Etudier et représenter graphiquement f.

b) Etudier les variations de f_n pour $n \geqslant 2$.

c) Représenter graphiquement f_n pour $n \geqslant 2$. En particulier, on étudiera les branches infinies, et on donnera la dérivée en O.

d) Comparer f_n et f_{n-1}.

2°) Quelle est la nature de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$? On ne cherchera pas à la calculer pour $n > 1$.

II

Dans toute la suite du problème, on notera $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

1°) Soit (u_n) une suite tendant vers O ; $(n \geqslant 1)$

a) Montrer que $\frac{1}{n} S_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$ tend vers O.

b) Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

2°) Si u_n tend vers le réel ℓ, quelle est la limite de $\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$?
(On pourra utiliser le 1° même si on ne l'a pas démontré).

.../...

3°) $u_n \geqslant 0$ est le terme général d'une série convergente.

$\frac{1}{n} S_n$ est-il un infiniment petit équivalent à u_n ?

4°) a) On pose $v_n = \frac{1}{n} + \text{Log}\ (1 - \frac{1}{n})$, pour $n \geqslant 2$. Log x désignant le logarithme népérien de x.
Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

b) En déduire la nature de la suite $w_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \text{Log } n$.

c) Si la série de terme général u_n est divergente, et si u_n a une limite ℓ, $\frac{1}{n} S_n$ est-il équivalent à u_n ? On examinera d'abord le cas $\ell \neq 0$, puis le cas $\ell = 0$.

III

1°) Etudier la suite définie par $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ et $u_1 \in \mathbb{R}$

2°) a) Ecrire u_{n+1} en utilisant u_1 et S_n.

b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3°) On suppose dans toute la suite que u_1 est un réel strictement positif.

a) Quelle est la nature de la série de terme général $t_n = u_{n+1} - u_n$?

b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n^2 ?
(On pourra utiliser un équivalent de f(x)-x).

4°) a) Donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0, de $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x}$.

b) Montrer l'égalité $\frac{1}{u_{n+1}} = n + \frac{1}{2} S_n + K_n$, K_n étant une suite bornée.

5°) Donner un équivalent simple de u_n.

6°) En utilisant le III 2° a), trouver la limite de $S_n - \text{Log } n$, en déduire un équivalent de $u_n - \frac{1}{n}$.

7°) Montrer que la série de terme général $x_n = u_n - \frac{1}{n}$ est convergente et calculer sa somme. (On appellera γ la limite de la suite w_n du II 4° b)).

IV

1°) Etudier la suite

$$J_n(A) = \int_0^A f_n(t)\, dt \qquad (A > 0)$$

2°) Montrer que l'intégrale I_n du I 2°) a une limite quand n tend vers $+\infty$
Calculer cette limite.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail